5 a) $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\vec{r}| = 5$.

Der Einheitsvektor $\vec{r_0}$ in Richtung $\overrightarrow{AB}$ lautet $\vec{r_0} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit ist der Ortsvektor des gesuchten Punktes P

$\vec{p} = \vec{a} + \vec{r_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}6 \\ 3{,}8 \\ -1 \end{pmatrix}$. P(2,6 | 3,8 | −1) liegt von A eine Einheit entfernt und von B dann 4 Einheiten.

Ebenen im Raum, Seite 16

1 P liegt in E für s = 1 und t = 0.

(zu lösendes LGS: $s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$),

P liegt auch in F für s = 1 und t = −5.
Q liegt in E für s = −1 und t = 0 und in F für s = −3 und t = 5.
R liegt nicht in E aber in F für s = −2 und t = 0

2 R in E: zu lösen: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ \; \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \; \\ -1 \end{pmatrix}$.

Daraus $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -4 - \; \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \; \\ -1 \end{pmatrix}$, also t = 3.

Damit wird E zu E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

R in F: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ \; \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \; \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Daraus $\begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ -4 - \; \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} \; \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also s = −9.

Damit wird F zu F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 einige mögliche Parameterdarstellungen sind

E: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \overrightarrow{PQ} + s \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

E: $\vec{x} = \vec{q} + r \cdot \overrightarrow{QP} + s \cdot \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

E: $\vec{x} = \vec{q} + r \cdot \overrightarrow{PR} + s \cdot \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

4 $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \vec{r} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5 a) P liegt nicht auf g. Eine mögliche Parametergleichung ist

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Für t = 0,5 liegt P auf g. Daher lässt sich nicht eindeutig eine Ebene angeben.

6 Für r = 1 liegt S auf g, für r = 0 liegt S auf h.

Mögliche Parametergleichung: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: als Stützvektor von E kann auch der Ortsvektor von S oder der Stützvektor von h verwendet werden.

7 $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

8 a) $\vec{p} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmung von r und s: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Daraus wird $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die ersten beiden Zeilen liefern s = 0 und r = −1.
Damit ist a − 2 = −1, also a = 1.

b) $\vec{p} = \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$,

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bestimmung von r und s: $\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Daraus wird $\begin{pmatrix} 3 \\ b-2 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aus der dritten Zeile erhält man $s = -\frac{1}{3}$, aus der ersten Zeile dann r = 1. Damit wird die zweite Zeile zu b − 2 = −3, also b = −1.

Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt, Seite 18

1 a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5 + 6 + 2 = 3$
b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 - 7 + 8 = 0$
c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

2 a) $0 = \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot -1 + \vec{a} \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = -2 + 3a - 4$
$= -6 + 3a$, also a = 2
b) $0 = \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot (-1) + 2 \cdot b + b \cdot 2 = 1 + 4b$, also b = −0,25
c) $0 = \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot c + c \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 2c + 4$, also c = −2

3 a) es muss $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = 0$ sein,

also $0 = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot a = 3 + 2a$, also a = −1,5

b) es muss $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ a \end{pmatrix} = 0$ sein,

also $0 = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot a + (-7) \cdot a = -3 - 3a$, also a = −1

4 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 11$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$.
Der rechte Winkel ist in der Ecke B.

b) Für den Eckpunkt D gilt: $\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$

bzw. $\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$. D(7|3|11)

5 a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 6 + 4 = 0$
$\vec{a} \perp \vec{b}$: ☒ ja ☐ nein
ggf. Bedingung für $\vec{c} \perp \vec{a}$: $2 + 3c_2 + c_3 = 0$

ggf. Bedingung für $\vec{c} \perp \vec{b}$: $1 - 2c_2 + 4c_3 = 0$

Lösung des LGS: $c_2 = -0{,}5$, $c_3 = -0{,}5$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 + 4 = 1$
$\vec{a} \perp \vec{b}$: ☐ ja ☒ nein

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 24 - 12 - 12 = 0$
$\vec{a} \perp \vec{b}$: $\vec{a} \perp \vec{b}$: ☒ ja ☐ nein
ggf. Bedingung für $\vec{c} \perp \vec{a}$: $4 + 2c_2 - 3c_3 = 0$

ggf. Bedingung für $\vec{c} \perp \vec{b}$: $6 - 6c_2 + 4c_3 = 0$

Lösung des LGS: $c_2 = 3{,}4$, $c_3 = 3{,}6$

Normalengleichung und Koordinatengleichung einer Ebene, Seite 19

1 a) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

b) P liegt nicht in E, da $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 11 \neq 0$.

Q liegt in E, da $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 + 3 = 0$

2 a) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

b) P in E: $\left(\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

wird zu $0 = 2 \cdot (a - 1) - 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = 2a + 10$, also $a = -5$

Q in E: $\left(\begin{pmatrix} b \\ b \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

wird zu $0 = 2 \cdot (b - 1) - 2 \cdot (b - 4) + 5 \cdot 2 = 2b - 2 - 2b + 8 + 10 = 16$.
Es existiert kein solches b.

R in E: $\left(\begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

wird zu $0 = 2 \cdot (c - 1) - 2 \cdot (c - 4) + 5 \cdot c = 2c - 2 - 2c + 8 + 5c$

$= 5c + 6$, also $c = -\frac{6}{5}$

3 Der Richtungsvektor von g ist ein Normalenvektor zu E.

E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

4 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E, P(2|3|10) liegt in E.

E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

5 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E, P(2|3|0) liegt in E.

E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

6 a) $-3 \cdot (x_1 - 0) + 1 \cdot (x_2 - 2) + 5 \cdot (x_3 - 2) = 0$.
Also E: $-3x_1 + x_2 + 5x_3 = 12$
b) $2 \cdot (x_1 + 1) - 2 \cdot (x_2 - 3) + 4 \cdot (x_3 - 4) = 0$.
Also E: $2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8$
c) $1 \cdot (x_1 - 1) + 0 \cdot (x_2 + 2) + 4 \cdot (x_3 - 2) = 0$.
Also E: $x_1 + 4x_3 = 9$

7 Normalengleichung: E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$,

Koordinatengleichung: E: $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

8 $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$, Mittelpunkt: $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Normalengleichung E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$.

Koordinatengleichung: E: $4x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 86$

9 a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E, P(4|0|0) liegt in E.

Normalengleichung E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E, P(4|0|5) liegt in E.

Normalengleichung E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E, P(−1|0|2) liegt in E.

Normalengleichung E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

d) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E, P(−1,5|0|0) liegt in E.

Normalengleichung E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

2 a) Der rechte Vektor ist richtig.
b) Der mittlere Vektor ist richtig.

3 a) $P_t(-7 + 12t \mid 5 - 9t \mid -2 + 5t)$.
$\overrightarrow{P_tR} = \begin{pmatrix} 17 - 12t \\ -9 + 9t \\ -7 - 5t \end{pmatrix}$. Es gilt: also $\begin{pmatrix} 17 - 12t \\ -9 + 9t \\ -7 - 5t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$, also
$(17 - 12t) \cdot 12 + (-9 + 9t) \cdot (-9) + (-7 - 5t) \cdot 5 = 0$
Lösen der Gleichung ergibt $t = 1$; $F(5 \mid -4 \mid 3)$; $|\overrightarrow{FR}| = 13$.
b) $P_t(7 + 2t \mid 4t \mid -9 - 6t)$.
$\overrightarrow{P_tR} = \begin{pmatrix} -15 - 2t \\ -5 - 4t \\ 15 + 6t \end{pmatrix}$. Es gilt: $\begin{pmatrix} -15 - 2t \\ -5 - 4t \\ 15 + 6t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$, also
$(-15 - 2t) \cdot 2 + (-5 - 4t) \cdot 4 + (15 + 6t) \cdot (-6) = 0$
Lösen der Gleichung ergibt $t = -2{,}5$;
$F(2 \mid -10 \mid 6)$; $|\overrightarrow{FR}| = \sqrt{125} \approx 11{,}18$.

4 Punkt B hat den kleinsten Abstand zur Geraden g, denn $d(A; g) = \sqrt{40} \approx 6{,}325$; $d(B; g) = 6$; $d(C; g) = \sqrt{75} \approx 8{,}66$.

5 Das Dreieck mit den Ecken $A(1 \mid 0 \mid -5)$, $B(1 \mid 4 \mid -2)$ und $C(1 \mid -2 \mid 6)$ hat den Flächeninhalt 25.
Das Dreieck mit $A(-2 \mid -4 \mid -4)$, $B(2 \mid 9 \mid 3)$ und $C(-2 \mid 11 \mid -1)$ hat den Flächeninhalt 45.
Das Dreieck mit $A(-8 \mid 10 \mid 0)$, $B(8 \mid -14 \mid 4)$ und $C(0 \mid -10 \mid 7)$ hat den Flächeninhalt $12\sqrt{53}$.
Das Dreieck mit $A(3 \mid 8 \mid -6)$, $B(3 \mid -2 \mid 4)$ und $C(-1 \mid -2 \mid -4)$ hat den Flächeninhalt $20\sqrt{6}$.

Abstand windschiefer Geraden, Seite 37

1 a) $G_s(-1 \mid -7 + 2s \mid 6 - s)$, $H_t(6 + 3t \mid 1 + 2t \mid 2t)$
$\overrightarrow{G_sH_t} = \begin{pmatrix} 7 + 3t \\ 8 + 2t - 2s \\ -6 + 2t + s \end{pmatrix}$
(1) $\begin{pmatrix} 7 + 3t \\ 8 + 2t - 2s \\ -6 + 2t + s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ und (2) $\begin{pmatrix} 7 + 3t \\ 8 + 2t - 2s \\ -6 + 2t + s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$
Ausführen der Skalarmultiplikation ergibt
(1) $2(8 + 2t - 2s) - (-6 + 2t + s) = 0$
(2) $3(7 + 3t) + 2(8 + 2t - 2s) + 2(-6 + 2t + s) = 0$
Dies führt auf das LGS (1) $22 + 2t - 5s = 0$
(2) $25 + 17t - 2s = 0$
mit den Lösungen $s = 4$ und $t = -1$. Einsetzen liefert $G(-1 \mid 1 \mid 2)$ und $H(3 \mid -1 \mid -2)$. $d(g; h) = 6$ LE.
b) $d(g; h) = \sqrt{38} \approx 6{,}164$

2 a) Der rechte Vektor ist richtig.
b) Der mittlere Vektor ist richtig.

3 a) $d(A; g) \approx 13{,}63$; $d(B; g) \approx 15{,}38$
b) h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (zum Beispiel)
$d(g; h) = 13$.
c) Der Abstand einer Geraden durch zwei Punkte A und B zu einer Gerade g ist höchstens so groß wie der jeweilige Abstand der beiden Punkte A und B zur Geraden g.

4 $A(2 \mid -2 \mid 0)$, $B(2 \mid 2 \mid 0)$,
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (zum Beispiel)
$C(-2 \mid 2 \mid 0)$, $S(0 \mid 0 \mid 6)$,
h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (zum Beispiel)
g und h sind windschief
$d(g; h) = \sqrt{14{,}4} \approx 3{,}79$

5 x_1: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $d(g; x_1) = \sqrt{3{,}2} \approx 1{,}79$

x_2: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $d(g; x_2) = \sqrt{6{,}4} \approx 2{,}53$

x_3: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $d(g; x_2) = \sqrt{\frac{208}{169}} \approx 1{,}11$

g hat zur x_3-Achse den kleinsten Abstand.

6 $d(g; h) = 12$.
Die Kugel darf höchstens den Radius 6 haben.

Winkel zwischen Vektoren – Skalarprodukt, Seite 39

1 a) $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| = 15$; $\cos(\alpha) = \frac{14}{75}$; $\alpha \approx 79{,}2°$
b) $|\vec{a}| = \sqrt{74}$; $|\vec{b}| = \sqrt{53}$; $\cos(\alpha) = \frac{-29}{\sqrt{3922}}$; $\alpha \approx 117{,}6°$

2 $|\vec{a}| = \sqrt{21}$; $|\vec{b}| = \sqrt{6}$; $|\vec{c}| = 13$

	$\vec{a}$	$-\vec{a}$	$\vec{c}$	$-\vec{c}$
$\vec{a}$	0°	180°	122,5°	57,5°
$\vec{b}$	90°	90°	91,8°	88,2°
$-\vec{b}$	90°	90°	88,2°	91,8°

3 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = 5$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ \cancel{12}\ 8 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{BC}| = \cancel{\sqrt{194}}$; $\sqrt{114}$
$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ \cancel{12}\ 8 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AC}| = \cancel{13}$ $\sqrt{89}$
b) $5^2 + 13^2 = 194 = \sqrt{194}^2$; also hat das Dreieck nach dem Satz von Pythagoras bei A einen rechten Winkel.
c) $\alpha = 90°$; $\beta \approx \cancel{69{,}0}$ 62,8 °; $\gamma \approx \cancel{21{,}0}$ 27,6 °
d) $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 13 = \cancel{32{,}5}$ FE
33,67 FE

4 a) $\cos(\alpha) = \frac{42 - 8 + 12}{7 \cdot 9} = \frac{46}{63}$; $\alpha \approx 43{,}1°$; im Nenner wurde nicht multipliziert sondern addiert.
b) $\cos(\alpha) = \frac{-2 + 6 - 5}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{228}}$; $\alpha \approx 93{,}8°$; beim Skalarprodukt im Zähler wurden die Vorzeichen vergessen.
c) $\cos(\alpha) = \frac{-10 - 12}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-22}{10\sqrt{7}}$; $\alpha \approx 146{,}3°$; mit dem GTR wurde nicht „$\cos^{-1}$" sondern „cos" berechnet.

Schnittwinkel, Seite 40

1 a) $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{30}}$; $\alpha \approx 87{,}7°$
b) $\cos(\alpha) = \frac{23}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{58}}$; $\alpha \approx 42{,}9°$