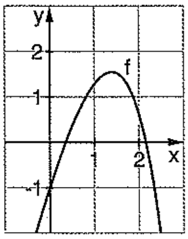
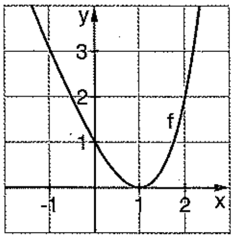
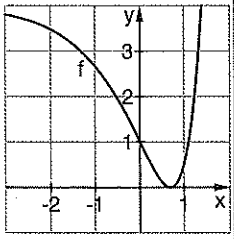
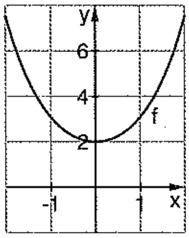
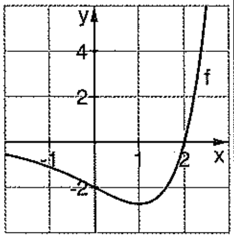
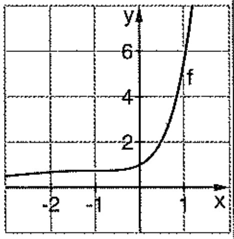
268

13. d) Bei Bakterien beschreibt g die Wachstumsgeschwindigkeit und s eine Art Sterberate. Hier hat dann eine Vergrößerung der Sterberate stärkere Auswirkungen als eine Verringerung der Wachstumsrate.

269

14.

| | a) $f(x) = 4x - e^x$ | b) $f(x) = e^x - e \cdot x$ | c) $f(x) = (e^x - 2)^2$ |
|---|---|---|---|
| Skizze |   |   |   |
| Schnitt-<br>punkte mit<br>Koordina-<br>tenachsen | (0\|–1)<br>(0,36\|0); (2,15\|0)<br>(grafisch-numerisch) | (0\|1)<br>(1\|0)<br>keine Lösungsformel, aber exakter Nachweis möglich:<br>$e^1 - e \cdot 1 = 0$ | (0\|1)<br>(ln(2)\|0) |
| Lokale Ex-<br>trempunkte | HP(ln(4)\|4 ln(4) – 4) | TP(1\|0)<br>(Hieraus folgt auch die Nullstelle.) | TP(ln(2)\|0)<br>$f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x$<br>$= 2e^x(e^x - 2)$ |
| | d) $f(x) = e^x + e^{-x}$ | e) $f(x) = (x - 2) \cdot e^x$ | f) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$ |
| Skizze |   |   |   |
| Schnitt-<br>punkte mit<br>Koordina-<br>tenachsen | (0\|2)<br>keine Nullstellen<br>(beide Summanden positiv) | (0\|–2)<br>(2\|0) | (0\|1)<br>keine Nullstellen<br>(beide Faktoren positiv) |
| Lokale Ex-<br>trempunkte | TP(0\|2)<br>$f'(x) = e^x - e^{-x} = 0$<br>$\Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = -x$ | TP(1\|–e)<br>$f'(x) = (x - 1) \cdot e^x$ | keine lokalen Extrema möglich: $x = -1$<br>$f'(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x$<br>$= (x + 1)^2 \cdot e^x$<br>$f''(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x$<br>$\Rightarrow f''(-1) = 0$<br>Sattelpunkt $\left(-1 \middle\| \frac{2}{e}\right)$ |

**269**

**15.** a) $f(x) = e^{kx}$ $\quad f'(x) = ke^{kx}$ $\quad f''(x) = k^2e^{kx}$ $\quad f'''(x) = k^3e^{kx}$
Bilden der nächst höheren Ableitung ist Multiplikation mit k, also: $f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$

b) $f(x) = e^x + e^{-x}$ $\quad f'(x) = e^x - e^{-x}$ $\quad f''(x) = e^x + e^{-x}$ $\quad f'''(x) = e^x - e^{-x}$
Die ungeraden Ableitungen sind $e^x - e^{-x}$, die geraden $e^x + e^{-x}$, also:
$f^{(2n+1)}(x) = e^x - e^{-x}$ und $f^{(2n)} = f(x)$

c) $f(x) = x \cdot e^x$ $\quad f'(x) = (x + 1) \cdot e^x$ $\quad f''(x) = (x + 2) \cdot e^x$ $\quad f'''(x) = (x + 3) \cdot e^x$
Mit jeder Ableitung erhöht sich der zweite Summand im ersten Faktor um 1, also:
$f^{(n)}(x) = (x + n) \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ $\quad f'(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^x$ $\quad f''(x) = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$ $\quad f'''(x) = (x^2 + 6x + 6) \cdot e^x$
Keine unmittelbare Gesetzmäßigkeit zu erkennen. Der Faktor vor „x“ scheint immer um 2 zu wachsen, von der Struktur her ist jede Ableitung ein Produkt aus einem quadratischen Term und $e^x$.

e) $f(x) = e^x \cdot x^2$ $\quad f'(x) = e^x + 2x$ $\quad f''(x) = e^x + 2$ $\quad f'''(x) = e^x$
Ab $f'''(x)$ sind alle höheren Ableitungen $e^x$.

**16.** a) $F = \int_{-4}^{0} e^x dx - 0{,}5 = 0{,}5 - e^{-4} \approx 0{,}4817$ $\quad$ b) $F = 3e - \int_{-2}^{1} e^x dx = 2e + e^{-2} \approx 5{,}5719$

c) $F = \int_{-1{,}352}^{0{,}237} (2e^x - 0{,}5 - e^{3x}) dx \approx 0{,}55$ $\quad$ d) $F = 2 \int_{0}^{\ln(2)} (2e^{-x} - 1) dx = 2(1 - \ln(2)) \approx 0{,}6137$
(Schnittstellen grafisch-numerisch bestimmen) $\quad$ (Symmetrie ausnutzen)

**17.**

| | | Tangente in $(0\|f(0))$ | Tangente in $(2\|f(2))$ |
|---|---|---|---|
| a) | $f(x) = e^{2x}$ | $y = 2x + 1$ | $y = 2e^4x - 3e^4$ |
| b) | $f(x) = 2e^x$ | $y = 2x + 2$ | $y = 2e^2x - 2e^2$ |
| c) | $f(x) = e^x + x$ | $y = 2x + 1$ | $y = (e^2 + 1)x - e^2$ |
| d) | $f(x) = x - e^x$ | $y = -1$ | $y = (1 - e^2)x + e^2$ |
| e) | $f(x) = x \cdot e^x$ | $y = x$ | $y = 3e^2x - 4e^2$ |
| f) | $f(x) = \frac{e^x}{x}$ | nicht definiert | $y = \frac{e^2}{4}x$ |

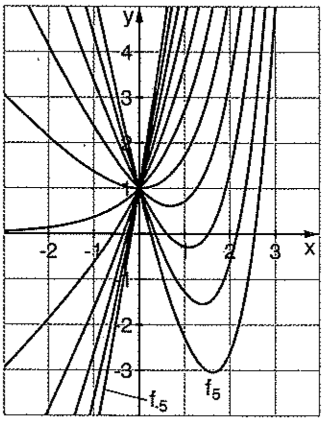
**18.** a) $4 = e - k \Rightarrow k = e - 4$

b) $f_k(2) = e^2 - 2k;\ e^2 - 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}e^2$

c) $F_1(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + c;\ e_1 - \frac{1}{2} + c = 0$
$\Rightarrow c = \frac{1}{2} - e$

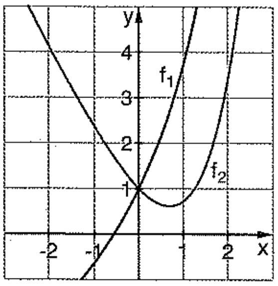
d) (1) $\int_{-1}^{1} f_k(x) dx = \left[e^x - \frac{k}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}$

(2) $\int_{-t}^{t} f_1(x) dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-t}^{t} = e^t - \frac{1}{e^t}$



**270**

**19.** a) $f_1(x) = e^x + x;\ f_2(x) = e^x - 2x$




$f_1(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty;\ f_1(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

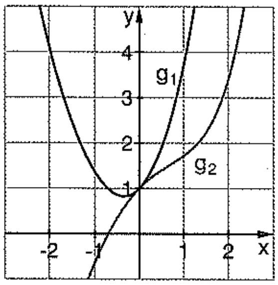
$f_2(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty;\ f_2(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \infty$

Nullstellen: $f_1$: $x_N \approx -0{,}567$; $f_2$: keine

Lokale Extrempunkte: $f_1$: keine; $f_2$: $TP(\ln(2)\,|\,2 - 2\ln(2))$

Wendepunkte: $f_1$: keine; $f_2$: keine

b) $g_1(x) = e^x + x^2;\ g_2(x) = e^x - x^2$




$g_1(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty;\ g_1(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \infty$

$g_2(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty;\ g_2(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

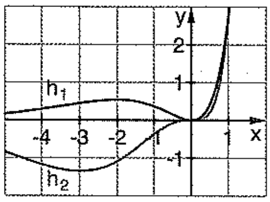
Nullstellen: $g_1$: keine; $g_2$: $x_N \approx -0{,}703$

Lokale Extrempunkte:

$g_1$: $TP \approx (-0{,}3517\,|\,0{,}8272)$; $g_2$: keine

Wendepunkte: $g_1$: keine; $g_2$: $(\ln(2)\,|\,2 - \ln(2)^2)$

c) $h_1(x) = x^2 \cdot e^x;\ h_2(x) = x^3 \cdot e^x$




$h_1(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty;\ h_1(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

$h_2(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty;\ h_2(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

Nullstellen: $h_1$: $x_N = 0$; $h_2$: $x_N = 0$

Lokale Extrempunkte:

$h_1$: $HP(-2\,|\,4e^{-2})$, $TP(0\,|\,0)$; $h_2$: $TP(-3\,|\,-27e^{-3})$

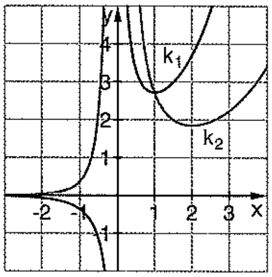
Wendepunkte:

$h_1$: $WP_{1,2}\left(-2 \pm \sqrt{2}\,\middle|\,(6 \mp 4\sqrt{2})e^{\pm\sqrt{2}-2}\right) \Rightarrow WP_1(-3{,}41\,|\,0{,}38),\ WP_2(-0{,}59\,|\,0{,}19)$

$h_2$: $WP_{1,2}\left(-3 \pm \sqrt{3}\,\middle|\,(-54 \pm 30\sqrt{3})e^{\pm\sqrt{3}-3}\right) \Rightarrow WP_1(-4{,}73\,|\,-0{,}93),\ WP_2(-1{,}27\,|\,-0{,}57)$

Sattelpunkt: $SP(0\,|\,0)$

d) $k_1(x) = \frac{e^x}{x};\ k_2(x) = \frac{e^x}{x^2};\ x \neq 0$




Für $x = 0$ gilt: $\begin{cases} k_1\text{: Pol mit VZW} \\ k_2\text{: Pol ohne VZW} \end{cases}$

$k_1(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty;\ k_1(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

$k_2(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty;\ k_2(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

Nullstellen: $k_1$: keine; $k_2$: keine

Lokale Extrempunkte: $k_1$: $TP(1\,|\,e)$; $k_2$: $TP\left(2\,\middle|\,\frac{1}{4}e^2\right)$

Wendepunkte: $k_1$: keine; $k_2$: keine

**270**

**19.** e) $l_1(x) = (e^x - 1)^2$; $l_2(x) = (e^x + 2)^2$

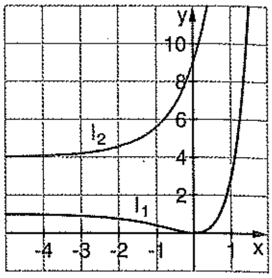
$l_1(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$; $l_1(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 1$

$l_2(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$; $l_2(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 4$

Nullstellen: $l_1$: $x_N = 0$; $l_2$: keine

Lokale Extrempunkte: $l_1$: TP$(0\,|\,0)$; $l_2$: keine

Wendepunkte: $l_1$: WP$\left(-\ln(2)\,\middle|\,\frac{1}{4}\right)$; $l_2$: keine




f) $m_1(x) = e^{x^2}$; $m_2(x) = e^{x^3}$

$m_1(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$; $m_1(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \infty$

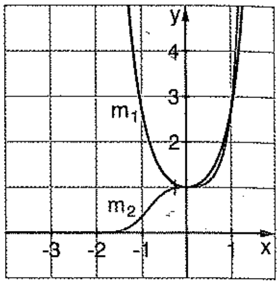
$m_2(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$; $m_2(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

Nullstellen: $m_1$: keine; $m_2$: keine

Lokale Extrempunkte: $m_1$: TP$(0\,|\,1)$; $m_2$: keine

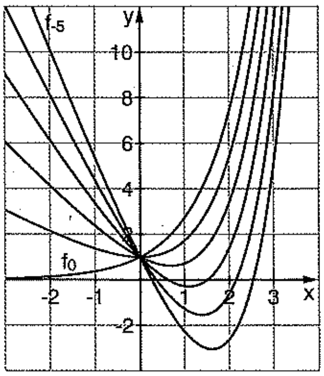
Wendepunkte: $m_1$: keine

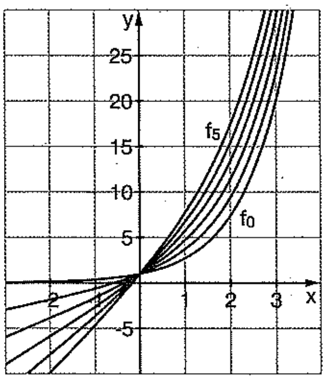
$m_2$: WP$\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,\middle|\,e^{-\frac{2}{3}}\right) \approx (-0{,}87\,|\,0{,}51)$, Sattelpunkt SP$(0\,|\,1)$




**20.** Anmerkung: In den Teilaufgaben wird der Gebrauch aller zur Verfügung stehenden Werkzeuge zur Untersuchung von Funktionenscharen trainiert. Dazu sollte gemäß der Aufgabenstellung zunächst ein grafischer Überblick mit ersten qualitativen Klassifikationen vorgenommen werden (GTR/Funktionenplotter). Entscheidend ist der Einsicht gebende Überblick über die Kurvenverläufe in Abhängigkeit des Parameters. Manchmal lassen sich beobachtete Eigenschaften direkt am Funktionsterm begründet erschließen, dies sollte vor jeder Rechnung versucht werden. Bei der genaueren Untersuchung prägen immer wieder grafisch-numerische und algebraische Methoden die Vorgehensweise. Nicht alle Gleichungen lassen sich algebraisch lösen.

a) $f_t(x) = e^x + tx$




- $t < 0$: 1 Tiefpunkt, Graph verläuft von $\infty$ nach $\infty$
  $t = 0$: $f_t(x) = e^x$
  $t > 0$: keine lokalen Extrem- und Wendepunkte
  $y = tx$ ist Asymptote für $x \to -\infty$

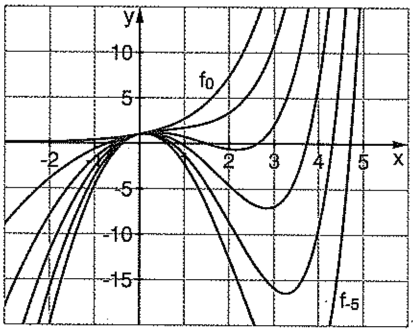
**270** **20.** Fortsetzung

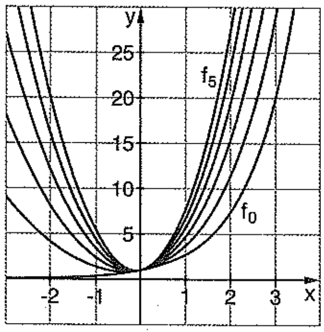
a)
- Achsenschnittpunkte: $(0|1)$; Nullstellen sind nur grafisch-numerisch für konkrete Werte von k bestimmbar. Nach Grafik existieren für $t > 0$ eine Nullstelle, für $-3 \lesssim t < 0$ keine Nullstelle und für $t \lesssim -3$ zwei Nullstellen.
- Lokale Extrempunkte: $\begin{cases} t \geq 0\text{: keine} \\ t < 0\text{: } TP(\ln(-t) \,|\, t \cdot \ln(-t) - t) \end{cases}$

  Anmerkung: Mit der y-Koordinate lässt sich auch der Übergang von keiner Nullstelle zu zwei Nullstellen exakt bestimmen: $t \cdot \ln(-t) - t = 0 \Rightarrow t = -e$

  Für $t = -e$ gibt es also eine Nullstelle, für $t < -e$ gibt es zwei Nullstellen.
- Wendepunkte: keine
- Ortskurve der Tiefpunkte: $y = (1 - x)e^x$

b) $f_a(x) = e^x + ax^2$




- $a < 0$: ein Tiefpunkt und ein Hochpunkt, ein Wendepunkt, Graph verläuft von $-\infty$ nach $\infty$

  $a = 0$: $f_a(x) = e^x$

  $a > 0$: keine Nullstellen, ein Tiefpunkt, keine Wendepunkte, Graph verläuft von $\infty$ nach $\infty$
- Achsenschnittpunkte: $(0|1)$

  Nullstellen: keine Lösungsformel

  Nach Grafik existieren für $a > 0$ keine Nullstellen, für $-1{,}5 \lesssim a < 0$ eine Nullstelle, für $a \approx -1{,}5$ zwei Nullstellen und für $a \lesssim -1{,}5$ drei Nullstellen.
- Lokale Extrempunkte: Die zu lösende Gleichung $e^x + 2ax = 0$ kann nur grafisch-numerisch gelöst werden. Die Anzahl der Extrempunkte in Abhängigkeit von a ist in Teilaufgabe a) beschrieben. Einsicht gibt hier auch eine grafische Untersuchung des Schnittproblems der bekannten Funktionen $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = -2ax$.
- Wendepunkte: $\begin{cases} a \geq 0\text{: keine} \\ a < 0\text{: } WP(\ln(-2a) \,|\, -2a + a \cdot \ln(-2a)^2) \end{cases}$
- Ortskurve der Wendepunkte: $y = \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)e^x$