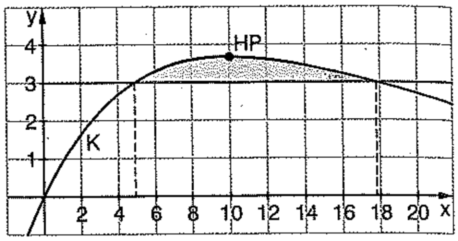
263

2. a) Verabreichung zum Zeitpunkt t = 0
Eliminationsphase: t > 0
Wirkungsdauer: Grafisch-numerische Lösung von K(t) = 3:
$x_1 \approx 4{,}9$; $x_2 = 17{,}8$
Wirkungseintritt nach ca. 5 Stunden, Wirkungsdauer ca. 13 Stunden



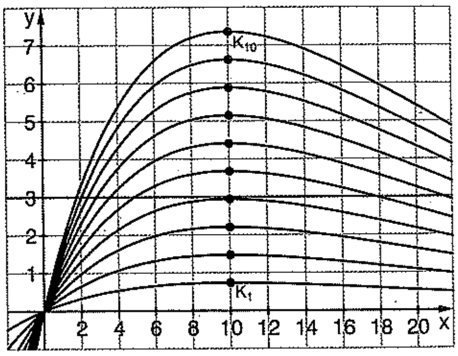
Aufbauphase und maximale Wirkungsstärke:
Extrempunkt: $K'(t) = (1 - 0{,}1t) \cdot e^{-0{,}1t} \Rightarrow HP\left(10 \middle| \frac{10}{e}\right)$
Aufbauphase: 10 Stunden
Maximale Wirkungsstärke wird nach 10 Stunden erreicht mit maximal wirksamer Konzentration von 3,7 mg/kg.

b) Stärkster Aufbau zu Beginn, weil dort die größte Steigung vorliegt (Kurve rechtsgekrümmt).
Stärkster Abbau nach 20 Stunden:
$K''(t) = (0{,}01t - 0{,}2) \cdot e^{-0{,}1t} \Rightarrow WP\left(20 \middle| \frac{20}{e^2}\right)$

c) Durchschnittliche Konzentration während der gesamten Wirkungsdauer beträgt ca. 3,4 mg/kg:
$\frac{1}{13} \int_5^{18} K(t)\,dt \approx 3{,}44$

d) $K_a(t) = a \cdot t \cdot e^{-0{,}1t}$ (Streckung in y-Richtung lässt x-Koordinaten (Zeitpunkte) der Hochpunkte (maximale Wirkung) unverändert):

$K_a'(t) = a \cdot (1 - 0{,}1t) \cdot e^{-0{,}1t}$
$\Rightarrow HP\left(10 \middle| \frac{10a}{e}\right)$

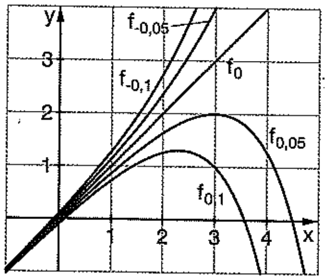


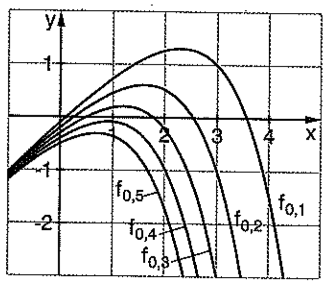
3. a) $f_k(0) = -k$, also gehört der linke Graph zu k = 1; der Graph in der Mitte zu k = 0,2; der rechte Graph zu k = −1.
Andere Begründung: Für k < 0 streben die Graphen für $x \to \infty$ gegen ∞ und für k = 0 verläuft der Graph durch den Ursprung. Mögliche Begründungen liefert auch das Einsetzen von z. B. x = 1 in die zugehörigen Funktionsterme:
$f_{-1}(1) = e + 1 \approx 3{,}7$; $f_{0,2}(1) = 1 - \frac{e}{5} \approx 0{,}5$; $f_1(1) = 1 - e \approx -1{,}7$
Für $x \to -\infty$ strebt $k \cdot e^{-x}$ gegen 0, also $\lim\limits_{x \to -\infty} k \cdot e^x = 0$, es gilt für sehr kleine x dann $f_k(x) \approx x$ oder $\lim\limits_{x \to -\infty} (f_k(x) - x) = 0$.

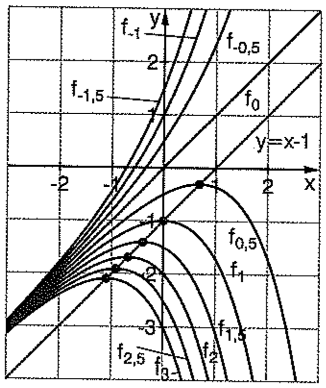
b) Nullstellen: Zu lösen ist die Gleichung $x - k \cdot e^x = 0$. Für solche transzendenten Gleichungen („x in Basis und Exponenten") gibt es im Allgemeinen keine Lösungsformeln, es sind nur grafisch-numerische Lösungen möglich.

263 **3.** Fortsetzung

b) Aus den Grafiken liest man ab:







$k \leq 0$: eine Nullstelle

$0 < k \lesssim 0{,}4$: zwei Nullstellen

$k \gtrsim 0{,}4$: keine Nullstellen

c) $f_k'(x) = 1 - ke^x \quad \Rightarrow \quad k > 0$: HP$\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) \middle| \ln\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right)$ für $k > 0$

Ortskurve der Hochpunkte:

$x = \ln\left(\frac{1}{k}\right) \quad \Rightarrow \quad y = x - 1$

Übergang von „keiner Nullstelle zu zwei Nullstellen“ bzw. „einer Nullstelle zu zwei Nullstellen“ liegt dort vor, wo der Hochpunkt die y-Koordinate 0 hat, also

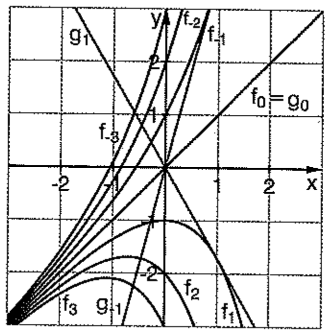
$\ln\left(\frac{1}{k}\right) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$. Es gibt keine Wendepunkte, da $f_k''(x) = -k \cdot e^x$ keine Nullstellen hat.

d) Tangentenschar in $B(1 \mid 1 - k \cdot e)$: $f_k'(1) = 1 - k \cdot e$

$y = (1 - k \cdot e) \cdot (x - 1) + 1 - k \cdot e$

$ = (1 - k \cdot e) \cdot x$

Die Tangenten verlaufen alle durch $(0 \mid 0)$.



265

4. a) $f(x) = 1000 \cdot 1{,}3^x = 1000 \cdot e^{\ln(1{,}3) \cdot x} = 1000 \cdot e^{0{,}2624x}$

$f(4) = 2856{,}1$; $f(26) = 917\,333{,}3\ldots$

Nach 4 Wochen sind es ca. 3000 Heuschrecken, nach einem halben Jahr ca. 900 000 (*).

$1000 \cdot e^{\ln(1{,}3)x} = 1\,000\,000 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln(1000)}{\ln(1{,}3)} \approx 26{,}3$

Nach gut einem halben Jahr sind es mehr als 1 Million Heuschrecken (folgt schon aus (*)).

$1000 \cdot e^{\ln(1{,}3)x} = 10\,000\,000 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln(10\,000)}{\ln(1{,}3)} \approx 35{,}1$

Nach knapp 9 Monaten sind es schon 10 Millionen Heuschrecken.

b) $1000 \cdot e^{\ln(1{,}3)x} = 300\,000\,000\,000 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln(300\,000\,000)}{\ln(1{,}3)} \approx 74{,}4$

Nach ca. 74 Wochen, also noch nicht einmal 1,5 Jahren, wäre die Rekordzahl erreicht. Das Modell ist aber mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nicht für einen so großen Zeitraum angemessen.

c)

	im ersten halben Jahr	nach den ersten 2 Jahren
mittlere Änderungsrate	$\frac{f(26) - f(0)}{26} \approx 35\,243$	$\frac{f(104) - f(0)}{104} \approx 6\,808\,874\,048\,480$
momentane Änderungsrate	$f'(26) \approx 240\,675$	$f'(104) = 185\,786\,144\,085\,000$

5. a) $f(x) = 200\,000 \cdot e^{\ln(0{,}945)x} = 200\,000 \cdot e^{-0{,}0566x}$

Halbwertszeit: $t_H = \frac{\ln(2)}{-\ln(0{,}945)} = 12{,}25$. Die Halbwertszeit beträgt ca. 12 Jahre.

Die Ungleichung $f(x) < 1$ liefert formal $x > 215{,}76\ldots$ Da letztendlich Zufallsschwankungen eine Rolle spielen, ist dieser Wert wenig aussagekräftig.

b) $A \cdot e^{-kx} = \frac{A}{2}$ hat als Lösung $x = \frac{\ln(2)}{k}$ und diese ist unabhängig von A.

6. a) A: (1) Benutzung eines Messwertes:

$(4|92)$: $92 = 30e^{4k} \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{46}{15}\right)}{4} \approx 0{,}28$;

$A_1(x) = 30 \cdot e^{0{,}28x}$

(2) Mit exponentieller Regression:

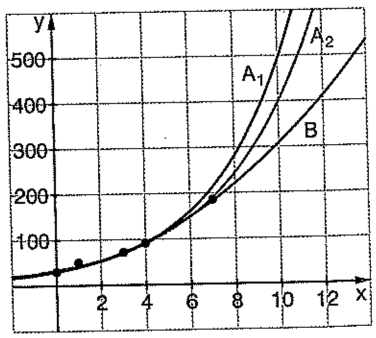
$A_2(x) = 33{,}8 \cdot e^{0{,}247x}$

B: Benutzung von zwei Messwerten:

$$\left.\begin{aligned} (3|72)&: \quad 72 = 9a + 3b + 30 \\ (7|185)&: \quad 185 = 49a + 7b + 30 \end{aligned}\right\} \text{LGS}$$

$\Rightarrow \quad a = \frac{57}{28} \approx 2 \quad$ und $\quad b = \frac{221}{28} \approx 7{,}9$

$B(x) = 2x^2 + 7{,}9x + 30$



Es passen verschiedene Funktionen und auch verschiedene Funktionstypen gleich gut zu den Daten.

265 **6.** b) $A_1(12) \approx 864$; $A_2(12) \approx 655$; $B(12) \approx 413$

$A_1(x) = 1500 \;\Rightarrow\; x \approx 14$

$A_2(x) = 1500 \;\Rightarrow\; x \approx 15{,}4$

$B(x) = 1500 \;\Rightarrow\; x \approx 25{,}2$

Die Prognosen für die Anzahl in 12 Jahren schwankt nicht nur beim Wechsel des Funktionstyps, sondern auch innerhalb desselben Funktionstyps. Das gleiche gilt für den Zeitraum, wenn es 1500 Tiere sein sollen.

c) Bei A sind die Verdopplungszeiten konstant:

A_1: $x_D = \frac{\ln(2)}{0{,}28} \approx 2{,}48$ $\quad$ A_2: $x_D = \frac{\ln(2)}{0{,}247} \approx 2{,}8$

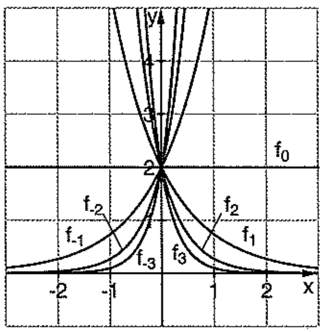
Bei B nehmen die Verdopplungszeiten zu, das quadratische Wachstum ist nicht so stark wie das exponentielle:

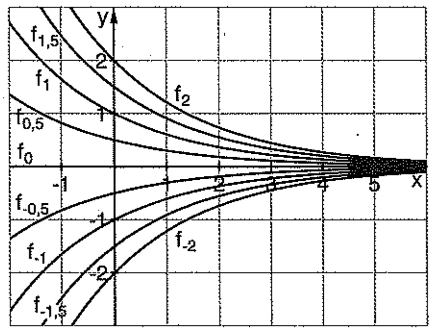
x	0	2,4	5	8,5	13,2
Anzahl	30	60	120	240	480
Verdopplungszeit	–	2,4	2,6	3,5	4,7

7. a) links: A variabel; in y-Richtung gestreckt, für negative Werte von A an der x-Achse gespiegelt

rechts: k variabel; Graphen verlaufen alle durch $(0\,|\,A)$, für negative Werte von k sind Graphen an y-Achse gespiegelt

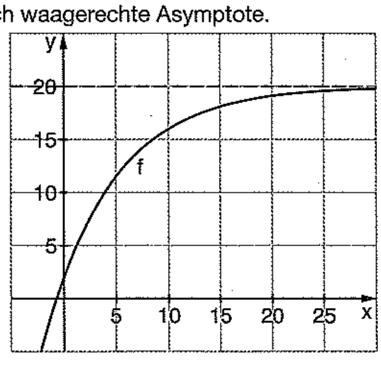
b) $f_k(x) = 2 \cdot e^{-kx}$ $\qquad$ $f_A(x) = A \cdot e^{-0{,}5x}$





266 **8.** a) Wenn die Verkaufsrate zu Beginn am größten ist, heißt dies, dass die erste Ableitung positiv und abnehmend ist, also die Verkaufskurve rechtsgekrümmt ist. Weil 20 000 die Grenze ist, ist y = 20 000 auch waagerechte Asymptote.

Für $f(x) = -18 \cdot e^{-0{,}15x} + 20$ gelten $f(0) = 2$ (2000 Verkäufe bei Markteinführung) und $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 20$.



b) $f(10) = 15{,}98$: Nach 10 Monaten sind ca. 16 000 Geräte verkauft.

$-18 \cdot e^{-0{,}15x} + 20 = 10$

$\Rightarrow\; x = -\frac{20}{3}\ln\left(\frac{5}{9}\right) \approx 3{,}92$

Nach ca. 4 Monaten ist die Hälfte der Geräte verkauft.