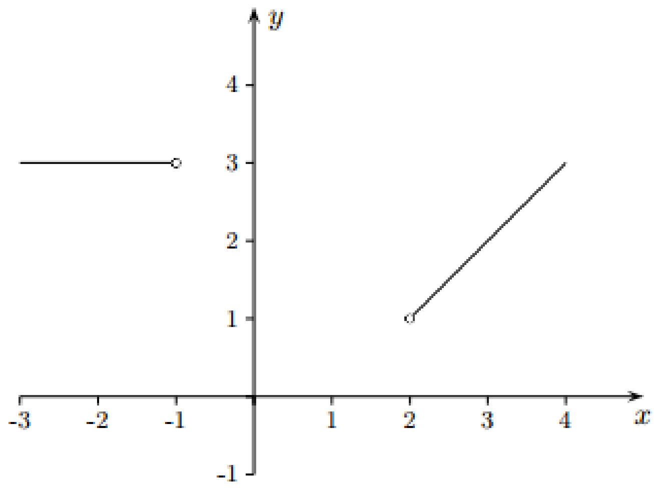
Die Strecke $A(-3\,|\,3)$ $B(-1\,|\,3)$ soll mit der Strecke
$B(2\,|\,1)$ $C(4\,|\,3)$ glatt verbunden werden.
Gesucht ist auch eine Lösung ohne Krümmungssprünge.



Begriff	***beide Funktionen bzw. Graphen …***
sprungfrei	gehen **nahtlos** ineinander über
knickfrei	haben an der **Verbindungsstelle dieselbe Steigung**
krümmungsruckfrei	haben an der **Verbindungsstelle dieselbe Krümmung**

a) Ermitteln Sie die beiden Funktionsgleichungen, auf denen die beiden Teilstrecken liegen.

Kontrollergebnisse: $q(x) = 3$ und $r(x) = x - 1$

b) Ermitteln Sie zunächst eine Funktion 3. Grades, die die Straßenstücke **sprung- und knickfrei** verbindet. Geben Sie dazu zunächst alle Bedingungen an und lösen Sie das entstehende Gleichungssystem. Skizzieren Sie die Funktion (mit beiden Geraden) auf einem Extrablatt. (Alle weiteren Lösungen befinden sich im Anhang.)

Zusätzlich soll die Verbindungsstraße nun außerdem noch **ohne Krümmungsruck** verlaufen.
Hinweis: Geraden haben keine Krümmung (2.Ableitung ist immer 0), daher müsste zusätzlich an beiden Übergangsstellen noch $f''(x) = 0$ gefordert werden.

c) Ermitteln Sie für eine passende Funktion 5 Grades nur das zu lösende Gleichungssystem. Dieses sollen sie **NICHT** lösen, nur angeben!

d) Die Funktion $f(x) = -4/27 \cdot x^4 + 5/9 \cdot x^3 + 2/9 \cdot x^2 - 49/27 \cdot x + 5/3$ ist an den Verbindungsstellen sowohl sprung- als auch knickfrei. Ist Sie aber auch krümmungsruckfrei?
Hinweis: Untersuchen Sie, ob $f''(-1) = 0$ und $f''(2) = 0$.

Lösungen zu b)

Die Strecke $A(-3\,|\,3)$ $B(-1\,|\,3)$ soll mit der Strecke $B(2\,|\,1)$ $C(4\,|\,3)$ glatt verbunden werden.
Gesucht ist auch eine Lösung ohne Krümmungssprünge.

Die vier Bedingungen

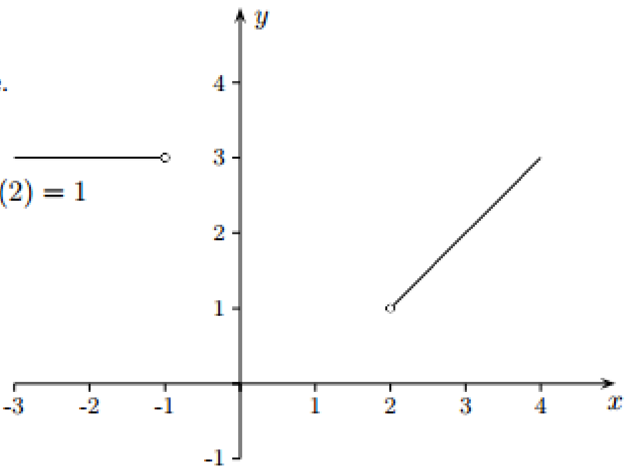
$$f(-1)=3,\quad f(2)=1,\quad f'(-1)=0,\quad f'(2)=1$$

führen mit dem Ansatz:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

über ein Gleichungssystem zur Lösung:

$$f(x)=\frac{1}{27}\left(7x^3-6x^2-33x+61\right)$$



Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lllll}
-a & +b & -c & +d & =3\\
8a & +4b & +2c & +d & =1\\
3a & -2b & +c & & =0\\
12a & +4b & +c & & =1
\end{array}$$

Musterlösung (Hinweis: Beim Übergang zwischen der 2. und 3. Matrix werden die 2. und 3. Zeile vertauscht.)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 3\\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 12 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ +8\cdot\mathrm{I}\\ +3\cdot\mathrm{I}\\ +12\cdot\mathrm{I}\end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 12 & -6 & 9 & 25\\ 0 & 1 & -2 & 3 & 9\\ 0 & 16 & -11 & 12 & 37 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ =\mathrm{III}\\ =\mathrm{II}\\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 3 & 9\\ 0 & 12 & -6 & 9 & 25\\ 0 & 16 & -11 & 12 & 37 \end{pmatrix}\begin{array}{l} -\mathrm{II}\\ \\ -12\cdot\mathrm{II}\\ -16\cdot\mathrm{II}\end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 & -6\\ 0 & 1 & -2 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 18 & -27 & -83\\ 0 & 0 & 21 & -36 & -107 \end{pmatrix}\begin{array}{l} 18\cdot\mathrm{I}-\mathrm{III}\\ 9\cdot\mathrm{II}+\mathrm{III}\\ \\ 6\cdot\mathrm{IV}-7\cdot\mathrm{III}\end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} -18 & 0 & 0 & -9 & -25 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -27 & -83 \\ 0 & 0 & 0 & -27 & -61 \end{array}\right) \begin{array}{l} 3\cdot I - IV \\ \\ - IV \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} -54 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & -27 & -61 \end{array}\right) \begin{array}{l} :(-54) \\ :9 \\ :18 \\ :(-27) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{27} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{61}{27} \end{array}\right)$$

Lösung zu c)

Um Krümmungssprünge zu vermeiden, muss zusätzlich

$$f''(-1) = 0, \quad f''(2) = 0$$

gefordert werden.

Mit dem Ansatz:

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

erhält man das Gleichungssystem:

16a	+ 8b	+ 4c	+ 2d	+ e	= 1
a	- b	+ c	- d	+ e	= 3
32a	+ 12b	+ 4c	+ d		= 1
-4a	+ 3b	- 2c	+ d		= 0
48a	+ 12b	+ 2c			= 0

Lösung zu d)

Man erhält $f''(-1) \approx -4,67 \neq 0$ und $f''(2) = 0$. Die Funktion garantiert also nur an der Stelle 2 einen Übergang ohne Krümmungsruck.